Klassische Bewegung eines Teilchens im elektromagnetischen Feld

Im Folgenden betrachten wir die Bewegung eines Teilchens mit der Ladung e und der Masse m in einem elektromagnetischen Feld der folgenden Form:

Elektrische Feld $\vec{E} = E\vec{e_1}$

Magnetische Feld $\vec{B} = B\vec{e_3}$

Zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ befinde sich das Teilchen im Ursprung des Koordinatensystems und habe eine Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}(0) = v_0\vec{e_2}$. Ziel ist es die Bahn $\vec{x}(t) = x_1(t)\vec{e_1} + x_2(t)\vec{e_2} + x_3(t)\vec{e_3}$ des Teilchens zu bestimmen.

Zunächst bestimmen wir die allgemeine Lösung des Problems. Die klassische Bewegungsgleichung ist gegeben durch

$$m\ddot{\vec{x}} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$\Leftrightarrow$

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x_1} \\ \ddot{x_2} \\ \ddot{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= eE + \dot{x}_2 Be && (*) \\ m\ddot{x}_2 &= -\dot{x}_1 Be && (**) \\ m\ddot{x}_3 &= 0 && (***) \end{aligned}$$

Durch zweimaliges Integrieren von Gleichung $(***)$ folgt:

$$x_3(t) = v_{03}t + s_{03} \;\; mit \;\; v_{03}, s_{03} \in \mathbb{R}$$

Betrachte nun Gleichungen $(*)$ und $(**)$. Teile Gleichung $(*)$ durch m, dann ergibt sich

$$\ddot{x_1} = \frac{eE}{m} + \dot{x_2}\frac{Be}{m}$$

Wir teilen nun Gleichung $(**)$ ebenfalls durch m

$$\ddot{x_2} = -\dot{x_1}\frac{Be}{m}$$

Dieses Ergebnis integrieren wir nun, um einen Ausdruck für $\dot{x_2}$ zu erhalten.

$$\Rightarrow \qquad \dot{x_2} = -x_1\tfrac{B}{m} + C \quad mit \quad C \in \mathbb{R}$$

Diesen Ausdruck für $\dot{x_2}$ können wir nun in unsere Gleichung, die wir aus $(*)$ erhalten haben, einsetzen:

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x_1} + x_1\tfrac{B^2e^2}{m^2} = \tfrac{eE}{m} + \tfrac{BeC}{m}$$

Dies ist die Differentialgleichung des harmonischen Oszillator. Wir definieren $\omega_0 := \frac{Be}{m}$ und somit ergibt sich

$$\ddot{x_1} + \omega_0^2 x_1 = \frac{eE}{m} + \frac{BeC}{m}$$

Es handelt sich hier um eine inhomogene Differentialgleichung, deren Lösung sich aus der Summe der Lösung der dazugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung ergibt. Die Lösung der homogenen Differentialgleichung ist die des harmonischen Oszillator

$$x_{hom} = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) \quad mit \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung ist gegeben durch

$$x_{inhom} = \frac{eE + BeC}{m\omega_0^2}$$

Dies lässt sich leicht durch Einsetzen in die Differentialgleichung überprüfen. Damit ergibt sich fr $x_1(t)$ folgende Lsung:

$$x_1(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) + \frac{eE + BeC}{m\omega_0^2}$$

Diesen Ausdruck für $x_1(t)$ können wir nun differenzieren und in Gleichung $(**)$ einsetzen.

$$\Rightarrow \qquad m\ddot{x_2} = (a\omega_0\sin(\omega_0 t) - b\omega_0\cos(\omega_0 t))Be$$

Durch zweimaliges Integrieren dieser Gleichung und Berücksichtigung der Definition $\omega_0 := \frac{Be}{m}$ folgt:

$$x_2(t) = -a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t) + Kt + D \quad mit \quad K, D \in \mathbb{R}$$

Setzt man nun die gewonnen Ausdrücke von $x_1(t)$ und $x_2(t)$ in Gleichung $(*)$ ein und fhrt einige elementare Rechenschritte aus ergibt sich:

$$eE + KBet = 0$$

$$\Rightarrow \qquad K = -\tfrac{E}{B}$$

Die allgemeine Lösung ist damit gegeben durch:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t) + \frac{eE+BeC}{m\omega_0^2} \\ -a\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t) - \frac{E}{B}t + D \\ v_{03}t + s_{03} \end{pmatrix}$$

Berücksichtigung der Anfangsbedingungen:

Aus $x_3(0) = 0$ und $\dot{x_3}(0) = 0$ folgt $v_{03} = 0$ und $s_{03} = 0$ und somit $x_3(t) = 0$.

$x_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad a + \frac{eE+BeC}{m\omega_0^2} = 0 \qquad\qquad (1)$

$\dot{x_1}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0$

$x_2(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$

$\dot{x_2}(0) = v_0 \quad \Rightarrow \quad -a\omega_0 - \frac{E}{B} = v_0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{v_0 m}{Be} - \frac{Em}{B^2 e}$

Dies setzen wir in (1) ein und nach einigen elementaren Rechenschritten ergibt sich $C = v_0$. Damit ergibt sich die Lösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen zu:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -(\frac{v_0 m}{Be} + \frac{Em}{B^2 e})\cos(\omega_0 t) + \frac{eEm+Bev_0 m}{B^2 e^2} \\ (\frac{v_0 m}{Be} + \frac{Em}{B^2 e})\sin(\omega_0 t) - \frac{E}{B}t \\ 0 \end{pmatrix} \quad mit \quad \omega_0 = \frac{Be}{m}$$

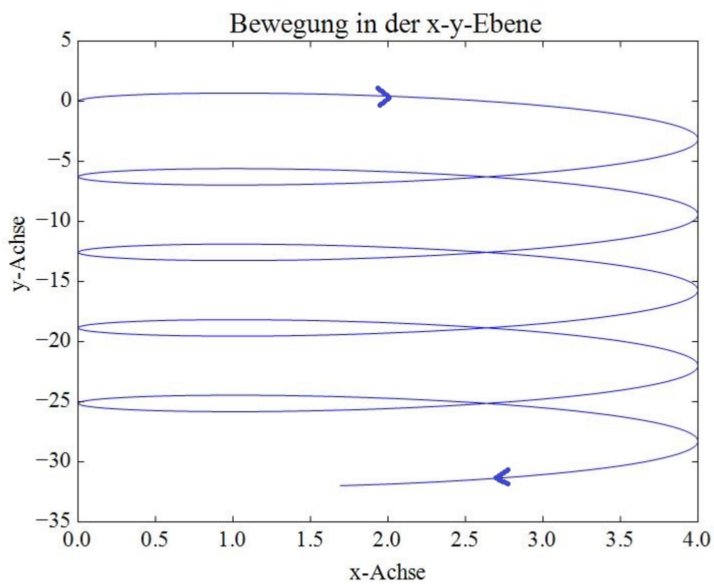
Im Folgenden wird die Bewegung des Teilchens in Abhängigkeit von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 diskutiert, wobei wir uns auf die x-y-Ebene beschränken, weil in der z-Richtung keine Änderung erfolgt.

Als Erstes diskutieren wir den Fall $v_0 = -\frac{E}{B}$. Ist diese Bedingung erfüllt, befinden sich magnetische und elektrische Kraft im Gleichgewicht und es ergibt sich folgende Trajektorie:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E}{B}t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ändert sich also nur die y-Position des Teilchens, während die x-Position konstant bleibt.

Für den Fall, dass $v_0 > 0$ ergibt sich folgende Trajektorie:



In einem späteren Abschnitt werden wir das gleiche Problem quantenmechanisch betrachten, was dann zu den sogenannten Landau-Niveaus führen wird.